

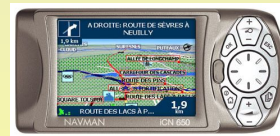
La Physique et le GPS

ENSL Mars 2006



La Physique et le GPS

ENSL Mars 2006



Plan de la conférence

I. Principe général de la localisation

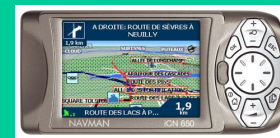
II. Un peu de Physique

II.1. Mouvements des satellites

II.3. Synchronisation des horloges

II.4. Propagation des ondes

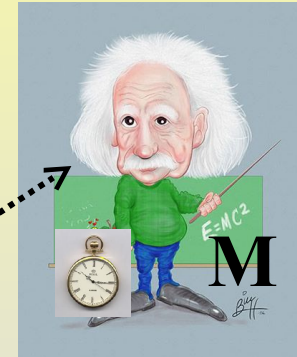
III. GPS et Galileo



LOCALISATION DANS UN PLAN (1)

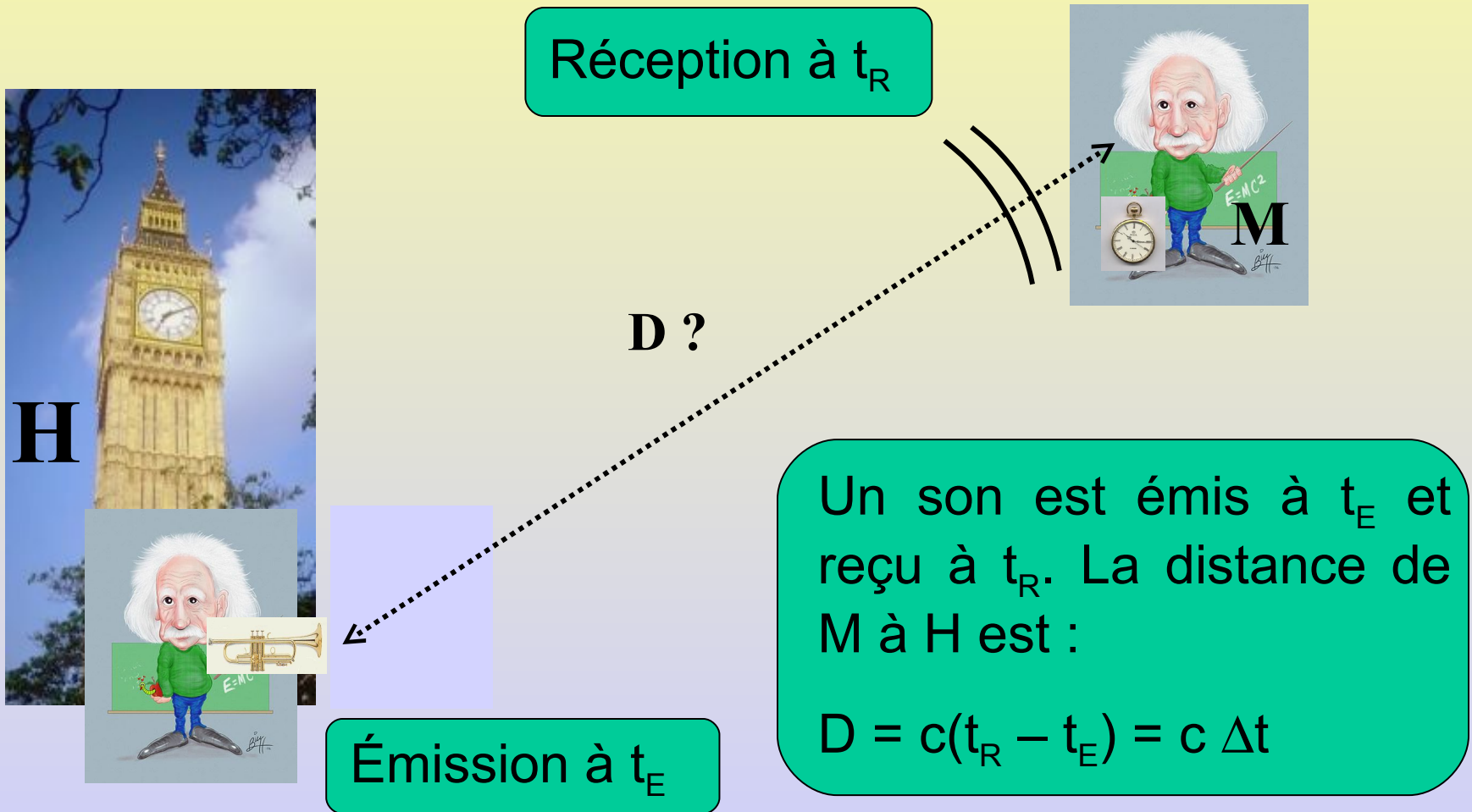


D ?



Émission à t_E

LOCALISATION DANS UN PLAN (1)



LOCALISATION DANS UN PLAN (2)



H_A

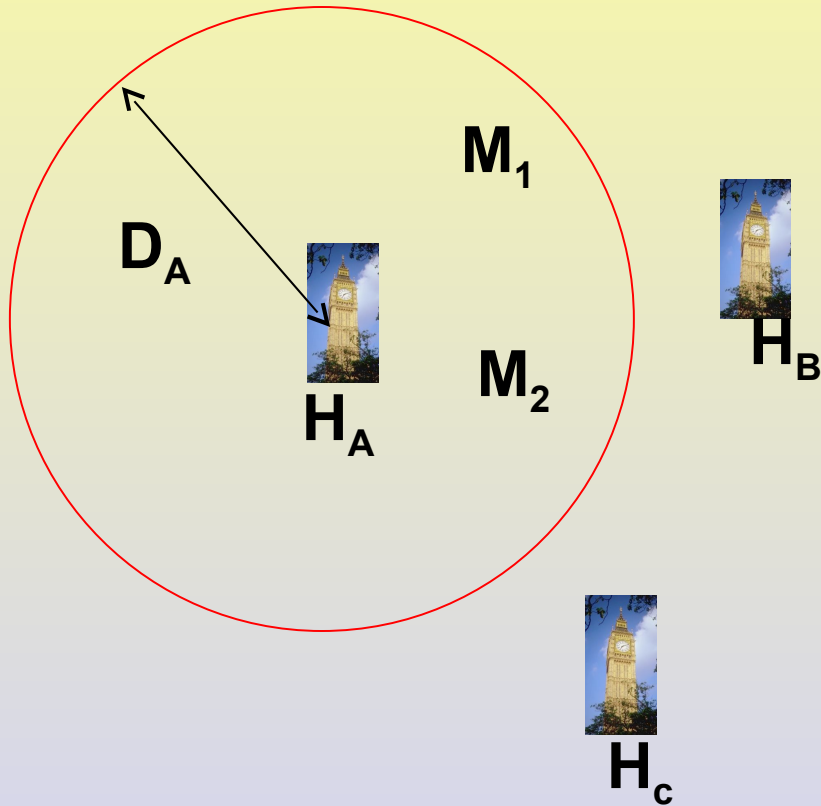


H_B

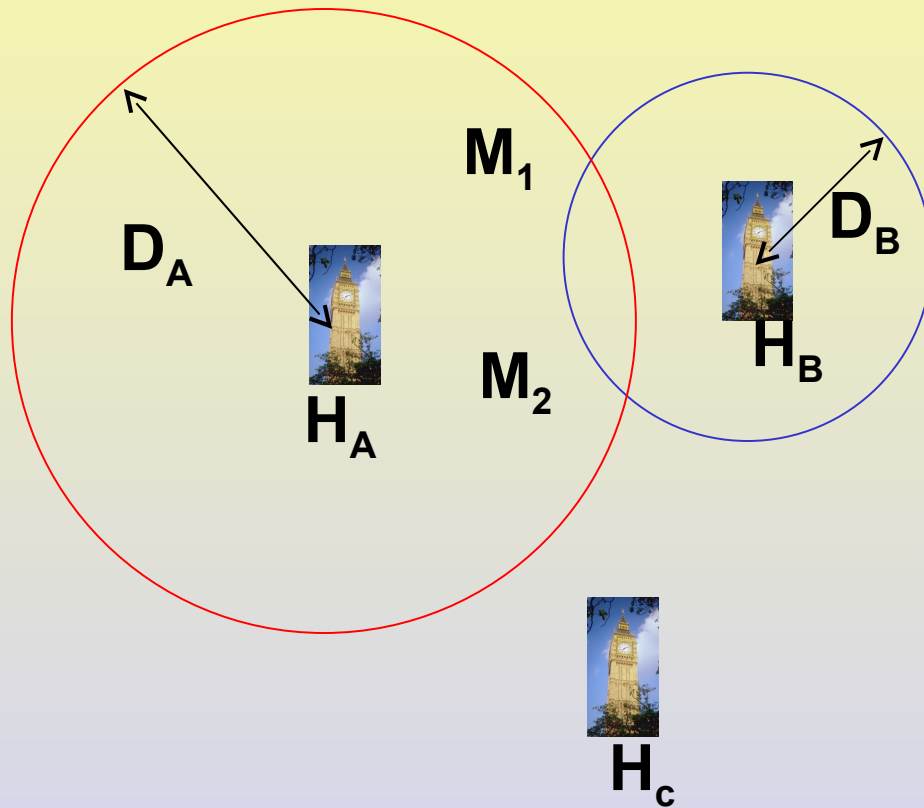


H_C

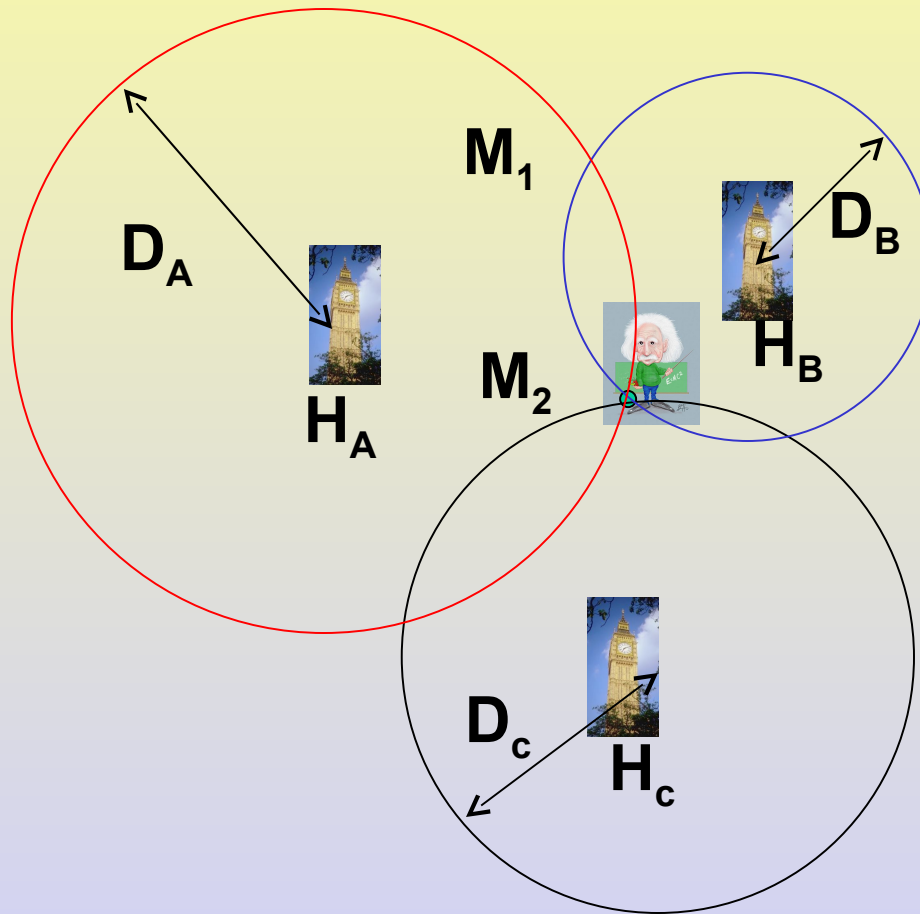
LOCALISATION DANS UN PLAN (2)



LOCALISATION DANS UN PLAN (2)

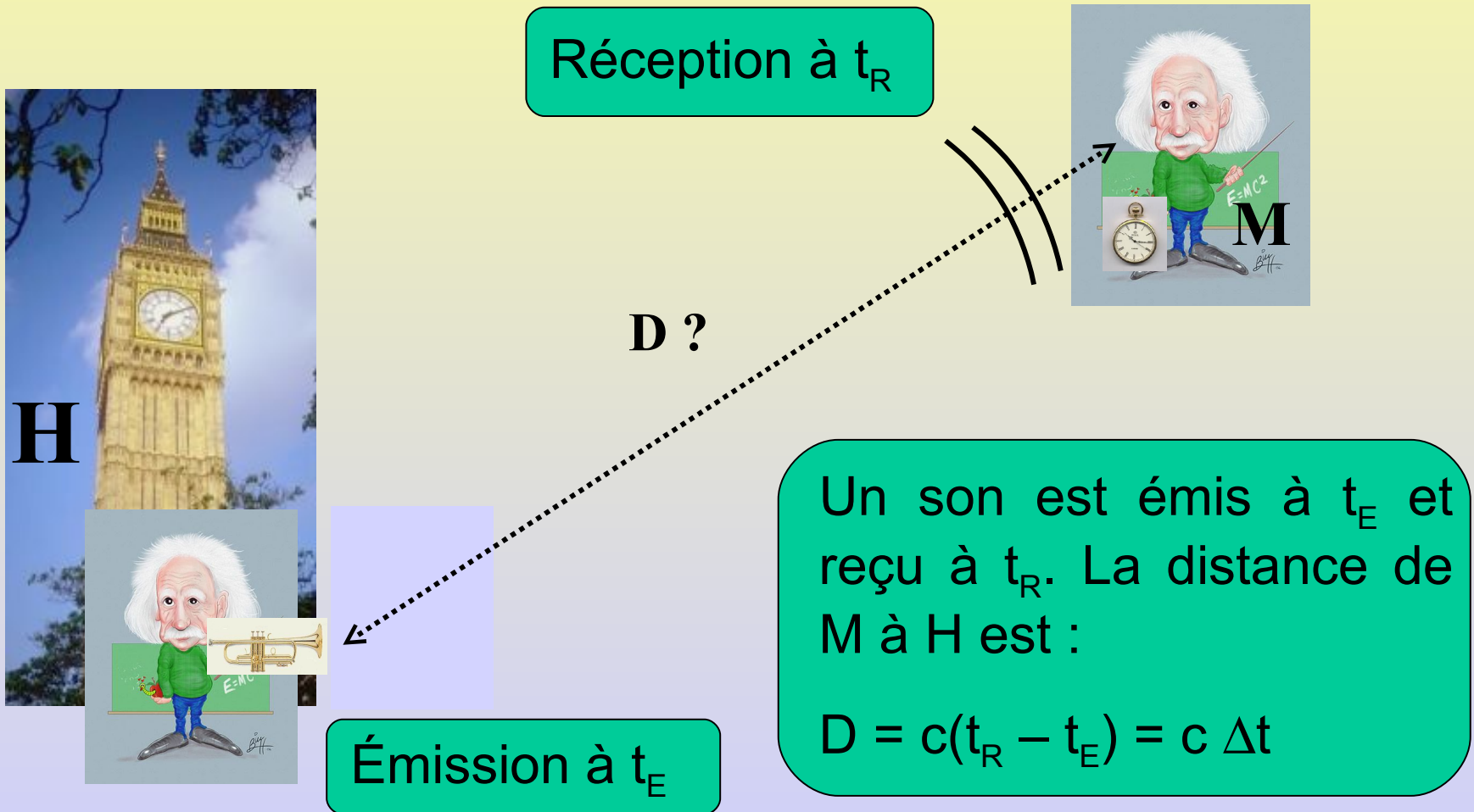


LOCALISATION DANS UN PLAN (2)



Si toutes les horloges sont synchronisées M est localisé grâce à 3 points repères.

LOCALISATION DANS UN PLAN (1)



Localisation dans l'espace (1)



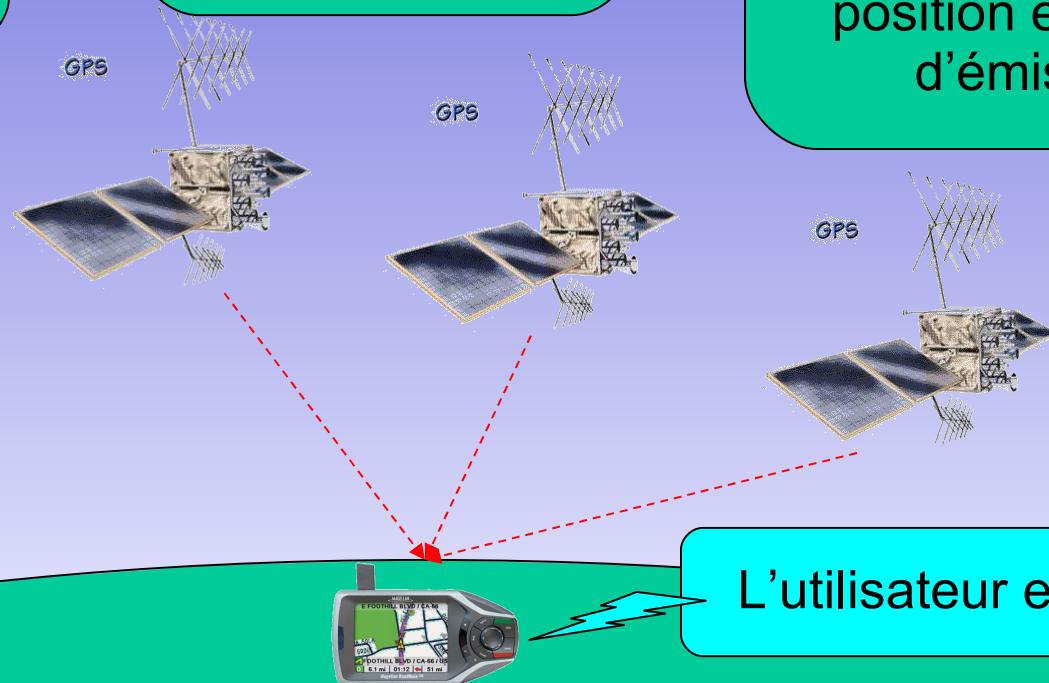
L'utilisateur est **ici** !

Localisation dans l'espace (1)

1. Des satellites munis d'horloges atomiques **synchronisés**

2. Les satellites connaissent leurs positions exactes grâce aux **stations de contrôle**

3. Chaque satellite transmet par **ondes électromagnétiques** son identification, sa position et la date d'émission



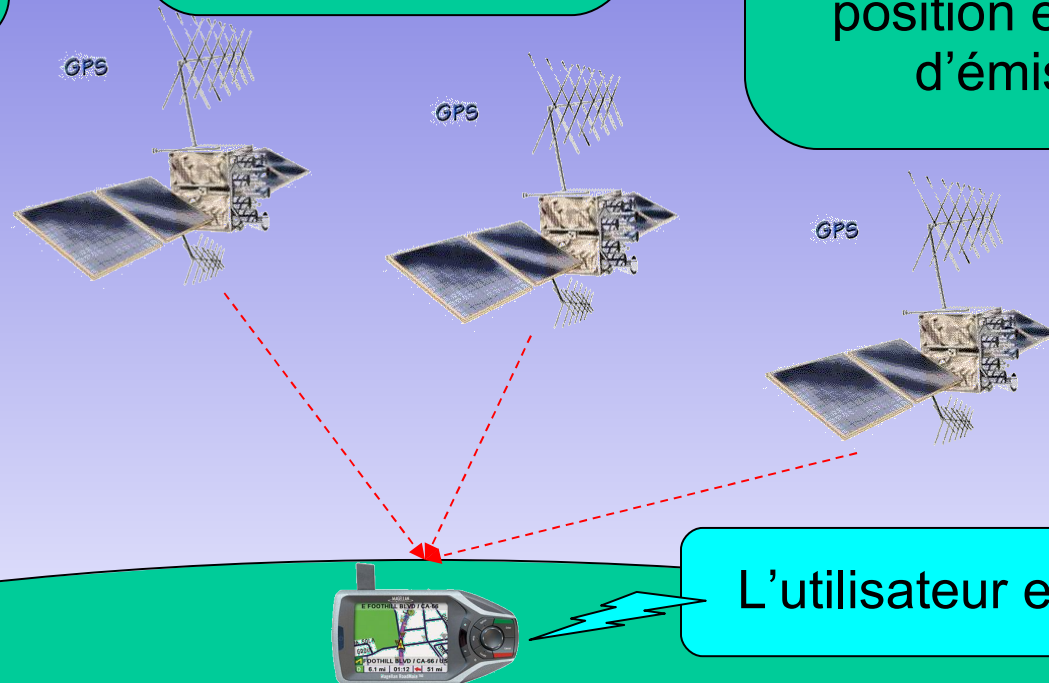
L'utilisateur est **ici** !

Localisation dans l'espace (1)

1. Des satellites munis d'horloges atomiques **synchronisés**

2. Les satellites connaissent leurs positions exactes grâce aux **stations de contrôle**

3. Chaque satellite transmet par **ondes électromagnétiques** son identification, sa position et la date d'émission



L'utilisateur est **ici** !

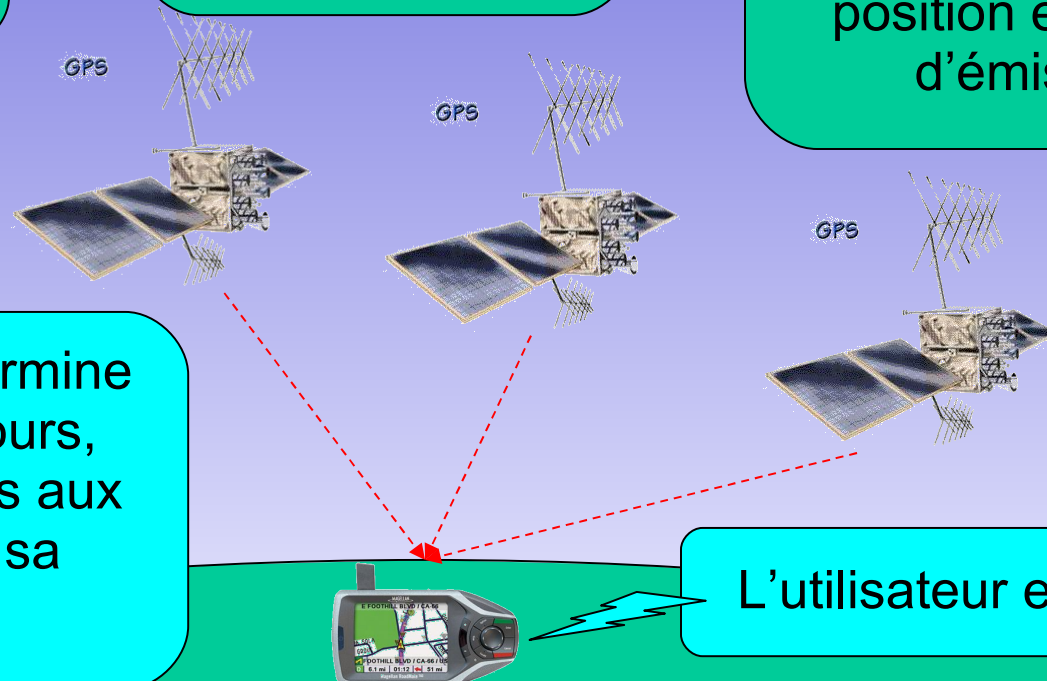
Localisation dans l'espace (1)

1. Des satellites munis d'horloges atomiques **synchronisés**

2. Les satellites connaissent leurs positions exactes grâce aux **stations de contrôle**

3. Chaque satellite transmet par **ondes électromagnétiques** son identification, sa position et la date d'émission

4. Le récepteur détermine les temps de parcours, calcule les distances aux satellites et enfin sa **position** !



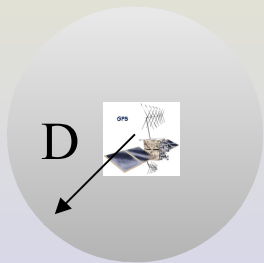
L'utilisateur est **ici** !

Localisation dans l'espace (2)

Une onde em est émise à t_E par le *satellite*,
elle est reçue à t_R par l'*utilisateur* :

La distance D satellite / utilisateur est :

$$D = c(t_R - t_E) \text{ avec } c = 299\,792,458 \text{ km/s}$$



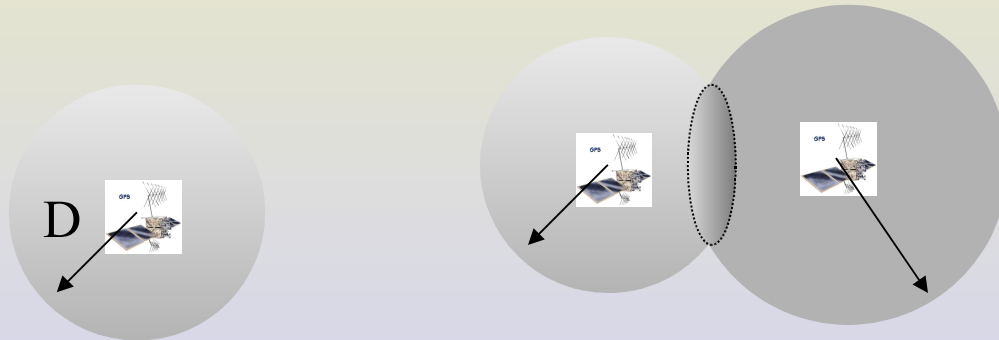
1 satellite : l'utilisateur est
sur une sphère de rayon D

Localisation dans l'espace (2)

Une onde em est émise à t_E par le *satellite*,
elle est reçue à t_R par l'*utilisateur* :

La distance D satellite / utilisateur est :

$$D = c(t_R - t_E) \text{ avec } c = 299\,792,458 \text{ km/s}$$



1 satellite : l'utilisateur est
sur une sphère de rayon D

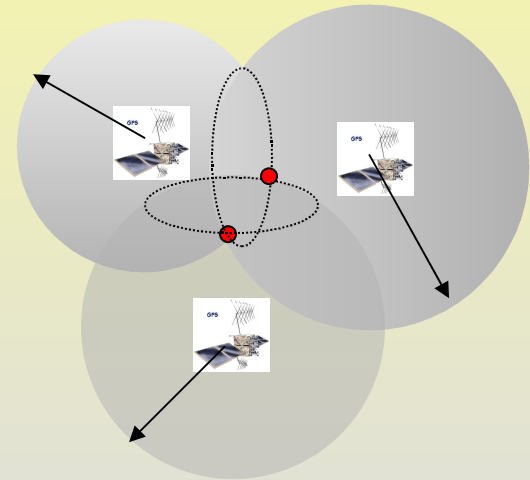
2 satellites : l'utilisateur
est sur un cercle

Localisation dans l'espace (2)

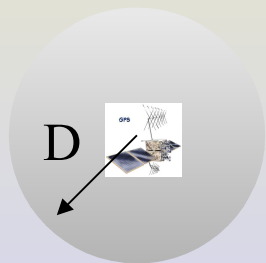
Une onde em est émise à t_E par le *satellite*, elle est reçue à t_R par l'*utilisateur* :

La distance D satellite / utilisateur est :

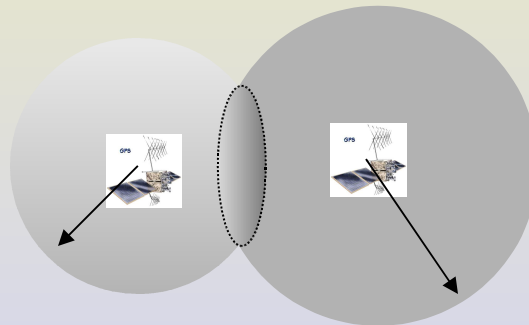
$$D = c(t_R - t_E) \text{ avec } c = 299\,792,458 \text{ km/s}$$



3 satellites : l'utilisateur est localisé (presque !)



1 satellite : l'utilisateur est sur une sphère de rayon D



2 satellites : l'utilisateur est sur un cercle

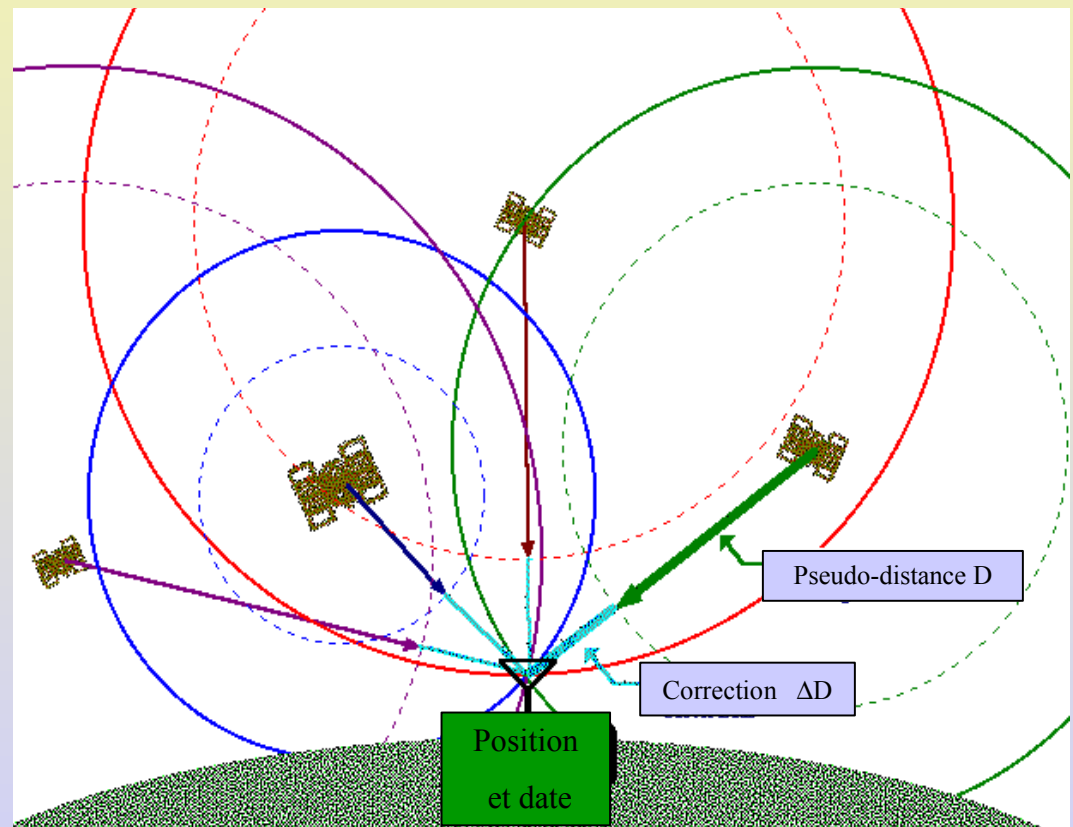
Localisation dans l'espace (3)

- En réalité l'horloge du récepteur n'est pas assez précise : erreur Δt .

- D est une « pseudo-distance », la vraie distance est :

$$D' = c(t_R + \Delta t - t_E) = D + \Delta D$$

- Avec 4 satellites on peut ajuster ΔD et déterminer la position de l'utilisateur ainsi que la date !



Une précision colossale nécessaire !

1 mètre, c'est la distance parcourue par une onde électromagnétique en 30 ns (30 milliardième de seconde) !

Conséquences :

- Utiliser des horloges atomiques sur Terre et dans les satellites

Sur Terre l' « exactitude » est de l'ordre de 0,1 ns par jour soit l'équivalent d'une seconde pour 30 millions d'années !

Pour les horloges embarquées elle de l'ordre de 10 ns par jour (futur 1 ns).

- Corriger l'horloge (à quartz) du récepteur
- **SYNCHRONISER** toutes ces horloges !

Une précision colossale nécessaire !

1 mètre, c'est la distance parcourue par une onde électromagnétique en 30 ns (30 milliardième de seconde) !



Horloges atomiques

Conséquences :

- Utiliser des horloges atomiques sur Terre et dans les satellites

Sur Terre l' « exactitude » est de l'ordre de 0,1 ns par jour soit l'équivalent d'une seconde pour 30 millions d'années !

Pour les horloges embarquées elle est de l'ordre de 10 ns par jour (futur 1 ns).

- Corriger l'horloge (à quartz) du récepteur
- **SYNCHRONISER** toutes ces horloges !

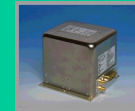
Une précision colossale nécessaire !

1 mètre, c'est la distance parcourue par une onde électromagnétique en 30 ns (30 milliardième de seconde) !



Horloges atomiques

Conséquences :



Horloge
embarquée

- Utiliser des horloges atomiques sur Terre et dans les satellites

Sur Terre l' « exactitude » est de l'ordre de 0,1 ns par jour soit l'équivalent d'une seconde pour 30 millions d'années !

Pour les horloges embarquées elle de l'ordre de 10 ns par jour (futur 1 ns).

- Corriger l'horloge (à quartz) du récepteur
- **SYNCHRONISER** toutes ces horloges !

Un peu de mécanique : mouvements des satellites (1)

Les lois de Kepler

(Pb des deux corps à symétrie sphérique ; $M \gg m$)

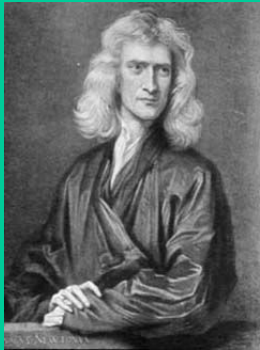


Kepler
(1571-1630)

2. La trajectoire est une ellipse dont un foyer est au centre de force
3. Le mouvement suit la loi des aires
4. Le carré de la période est proportionnelle au cube du demi-grand axe

Mouvements des satellites (2)

La mécanique newtonienne



Newton
(1642-1727)

1. P.F.D. (référentiel galiléen)

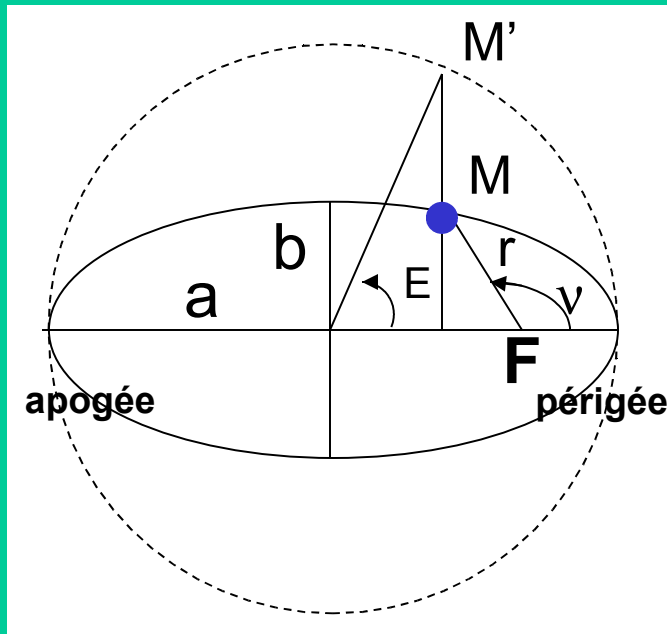
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

2. Loi de la gravitation

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \vec{u} + \dots$$

Mouvements des satellites (3)

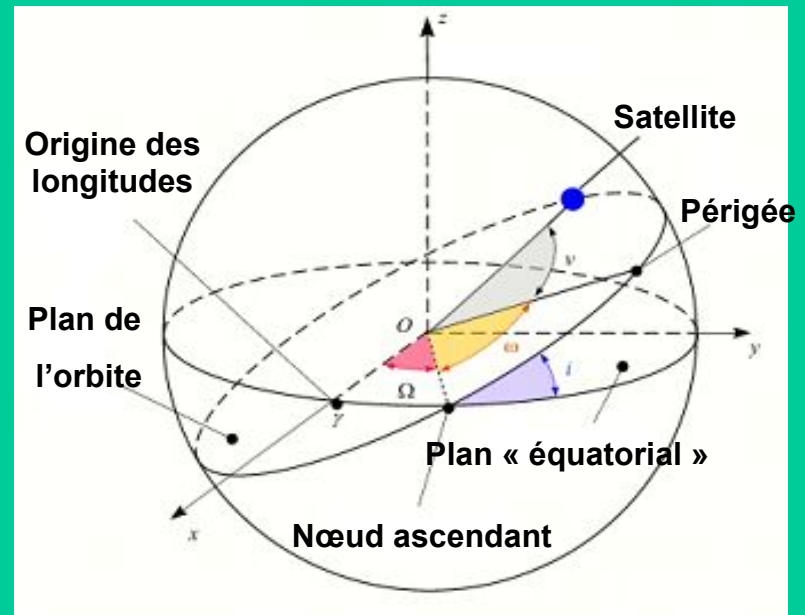
Les 6 éléments de l'orbite



a : demi-grand-axe

e : excentricité

t_0 : date de passage au périgée



i : inclinaison du plan de l'orbite

Ω : longitude du noeud ascendant

ω : position du périgée

Mouvements des satellites (4)

Au delà du problème des deux corps !

❑ Des perturbations ...

- La Terre n'est pas « sphérique »
- Le référentiel géocentrique n'est pas exactement galiléen (champ luni-solaire)
- La pression de radiation
- ...

Mouvements des satellites (4)

Au delà du problème des deux corps !

❑ Des perturbations ...

- La Terre n'est pas « sphérique »
- Le référentiel géocentrique n'est pas exactement galiléen (champ luni-solaire)
- La pression de radiation

...

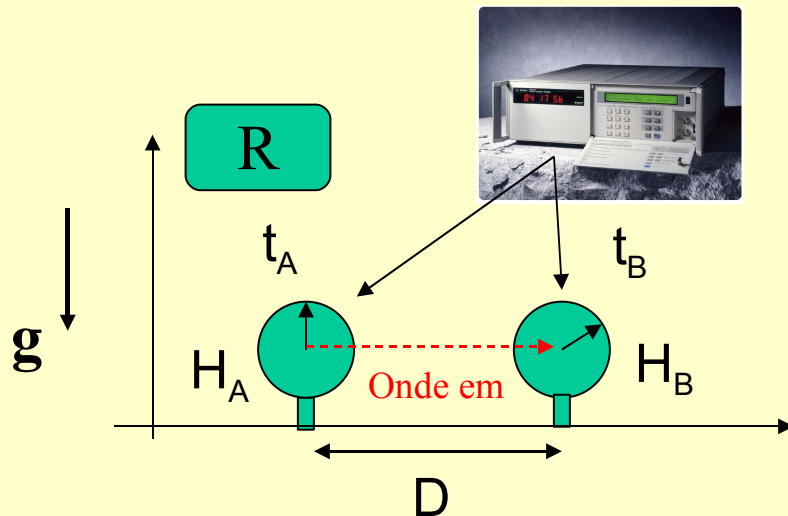
❑ et des conséquences

- Les éléments de l'orbite évoluent et doivent être réactualisés.
- Il est nécessaire de pouvoir déterminer leur évolution entre deux réactualisations.

Un peu de relativité :

Synchronisation des horloges (1)

Des horloges au repos et à la même altitude :



H_B est synchronisé avec H_A si :

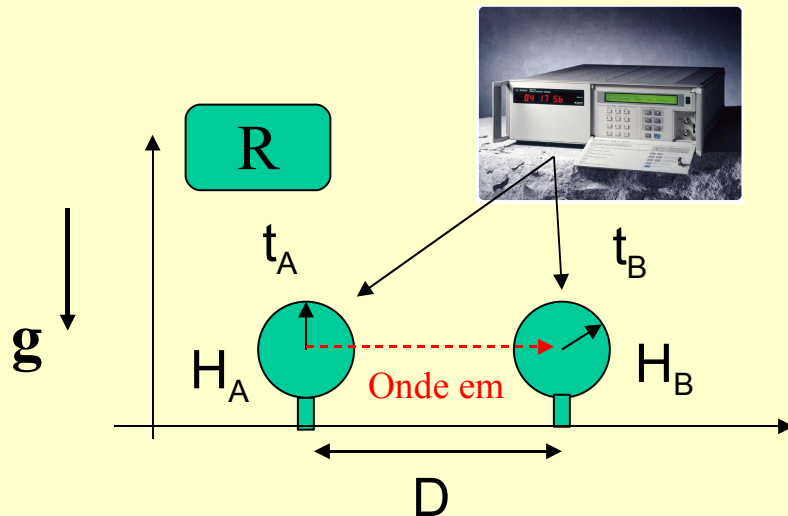
$$t_B = (t_A + D/c)$$

- La propagation des ondes em est mise en jeu !
- C'est la méthode employée en pratique depuis près d'un siècle...

Un peu de relativité :

Synchronisation des horloges (1)

Des horloges au repos et à la même altitude :



H_B est synchronisé avec H_A si :

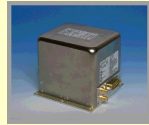
$$t_B = (t_A + D/c)$$

- La propagation des ondes em est mise en jeu !
- C'est la méthode employée en pratique depuis près d'un siècle...

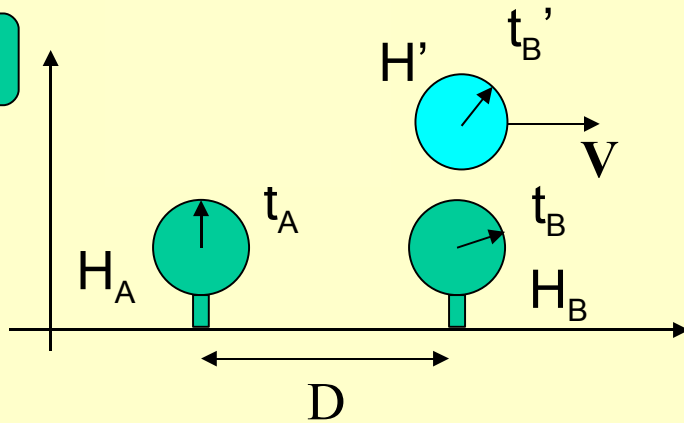
Est - ce aussi simple dans un système GPS ?

Synchronisation des horloges (2)

Horloges en mouvement ?



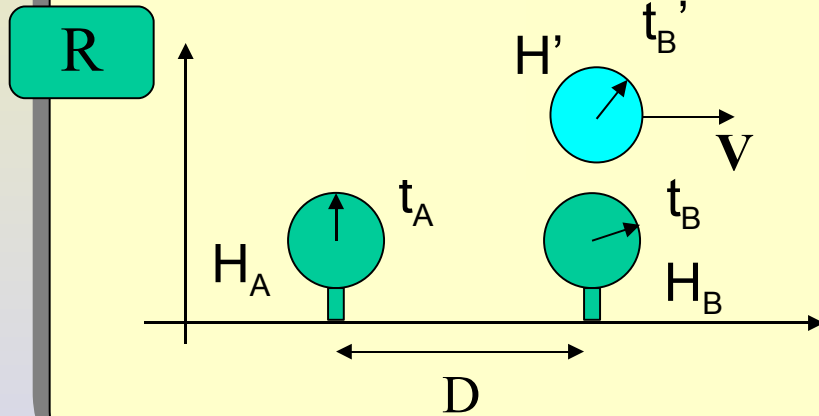
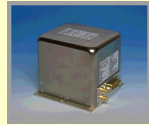
R



A - t - on : $t_B - t_A = t'_B - t'_A$?

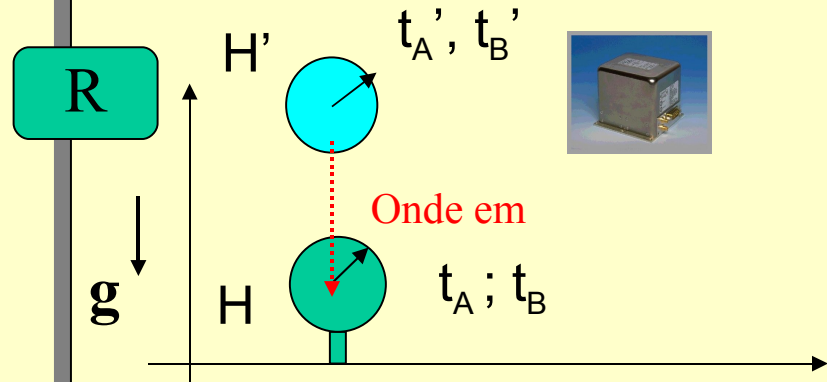
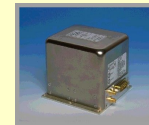
Synchronisation des horloges (2)

Horloges en mouvement ?



A - t-on : $t_B - t_A = t'_B - t'_A$?

Horloges en altitude ?



A - t-on : $t_B - t_A = t'_B - t'_A$?

Les réponses de la physique relativiste ...

Synchronisation et relativité restreinte (1)

Einstein (1905) et ses deux postulats :

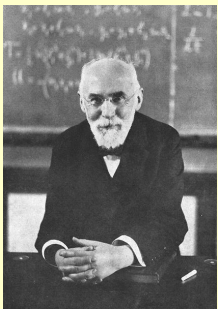


(2) Principe de **relativité restreinte**

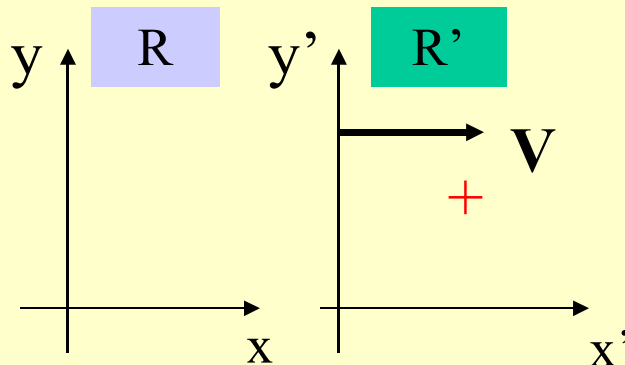
(2) principe d'**invariance** de la vitesse de la lumière

Espace et temps se fondent en un « **Espace-temps** »

Référentiels galiléens



Lorentz
(1853-1928)



Transformation de
Lorentz

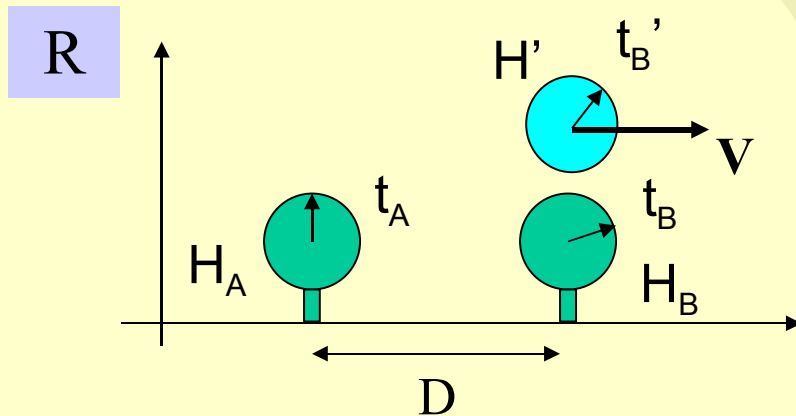
$$x = \gamma (x' + Vt')$$

$$y = y', z = z' \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right)$$

Synchronisation et relativité restreinte (2)

Conséquence de la transformation de Lorentz : la **dilatation des durées** ! Ou « à chacun son temps » ...



Horloge mobile : $\Delta t' = t'_B - t'_A$

Horloges « fixes » : $\Delta t = t_B - t_A$

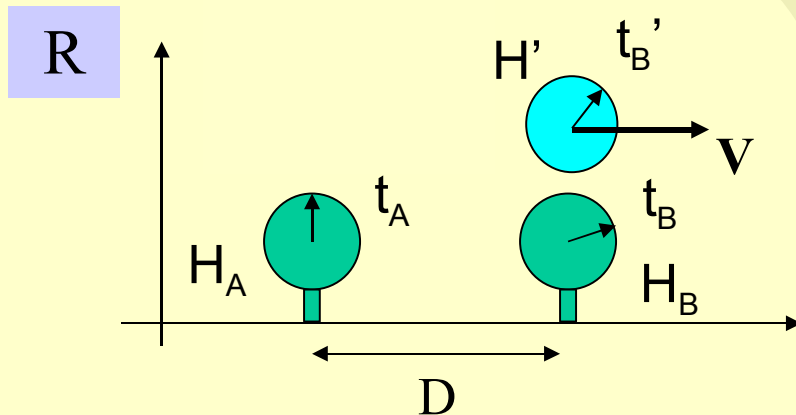
$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' !$$

« Le temps passe moins vite pour les horloges mobiles »



Synchronisation et relativité restreinte (2)

Conséquence de la transformation de Lorentz : la **dilatation des durées** ! Ou « à chacun son temps » ...



Horloge mobile : $\Delta t' = t_B' - t_A'$

Horloges « fixes » : $\Delta t = t_B - t_A$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' !$$

« Le temps passe moins vite pour les horloges mobiles »



Application au GPS :

$$\Delta t \approx \Delta t' + \Delta t' \frac{V^2}{2c^2}$$

$$V = 3,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}, c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

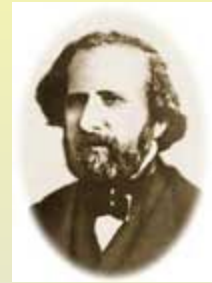
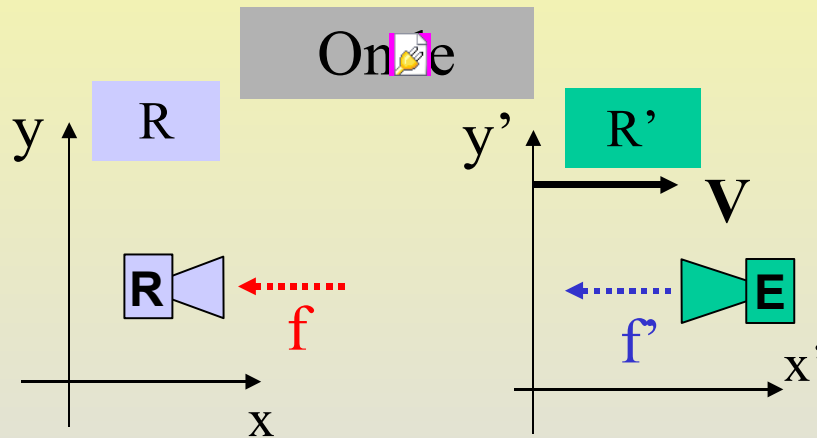
En un jour un **énorme** écart de

$$7 \mu\text{s} !$$

Interlude : Effet Doppler Fizeau



Doppler (1853-1928)

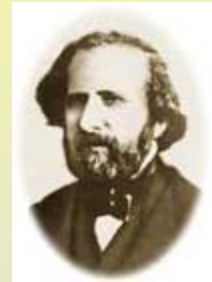
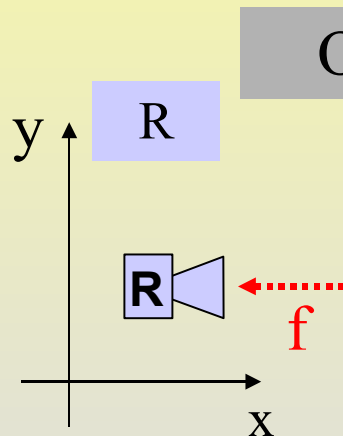


Fizeau (1819-1896)

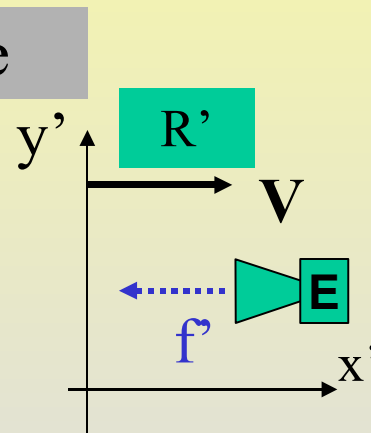
Interlude : Effet Doppler Fizeau



Doppler (1853-1928)



Fizeau (1819-1896)



Cinématique relativiste
(Einstein 1905)

$$f = f' \sqrt{\frac{1 \mp \frac{V}{c}}{1 \pm \frac{V}{c}}}$$

Cinématique classique
($V \ll c$)

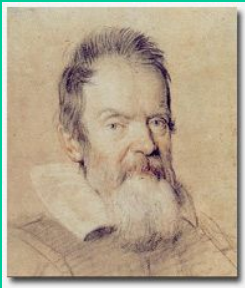
$$f = f' \left(1 \mp \frac{V}{c} \right)$$

Éloignement f] , rapprochement f Z

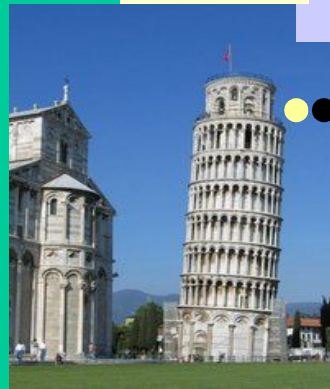
Synchronisation et relativité générale (1)

L'identité masse inertielle et masse
gravitationnelle

Galilée encore !



(1564-1642)



tennis

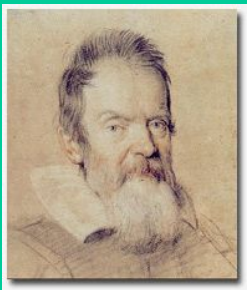
pétanque

La tour de Pise

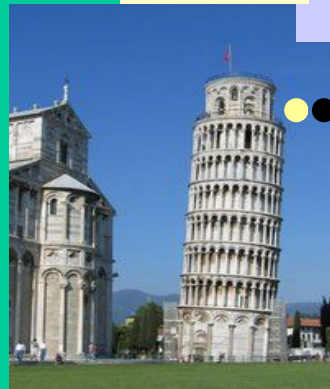
Synchronisation et relativité générale (1)

L'identité masse inertielle et masse gravitationnelle

Galilée encore !



(1564-1642)



tennis

pétanque

La tour de Pise

L'interprétation newtonienne

inertielle

gravitationnelle

$$m_i a = F = m_g g$$

$$\text{Si } m_i = m_g$$

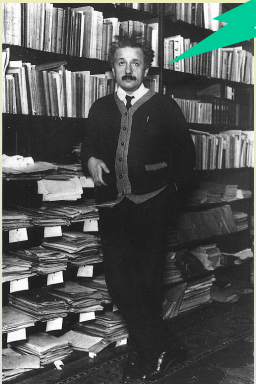
$$\text{alors } a = g \dots$$

(L'identité est vérifiée à 10^{-13} près actuellement)

Synchronisation et relativité générale (2)

Einstein (1916) Principe d'équivalence :

« le mouvement accéléré est comme le champ de gravitation »

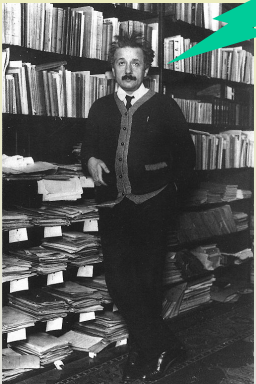


Einstein en
1920

Synchronisation et relativité générale (2)

Einstein (1916) Principe d'équivalence :

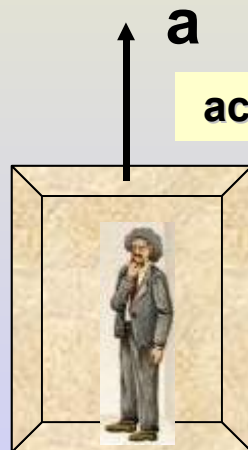
« le mouvement accéléré est comme le champ de gravitation »



Einstein en 1920

Un ascenseur d'Einstein

« expérience de pensée »



accélération

équivalent à :



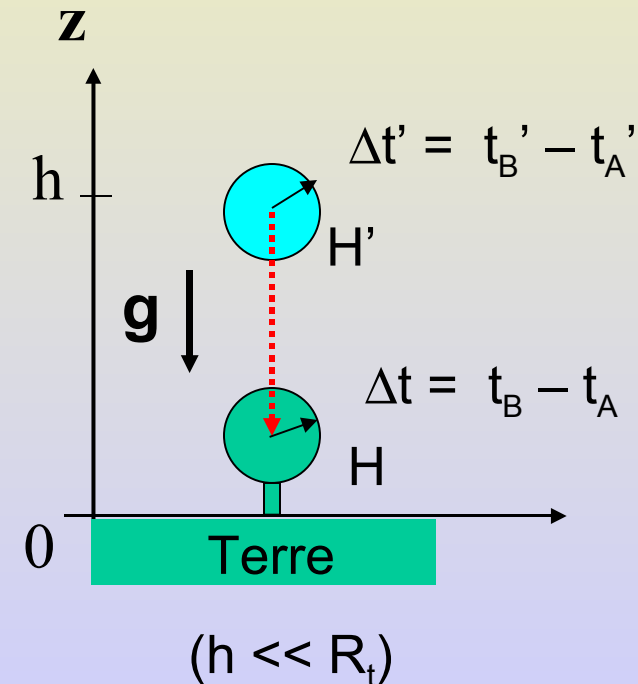
Champ de gravitation uniforme

$$g = -a$$

Synchronisation et relativité générale (3)

Conséquence de la relativité générale : **le ralentissement gravitationnel des horloges.**

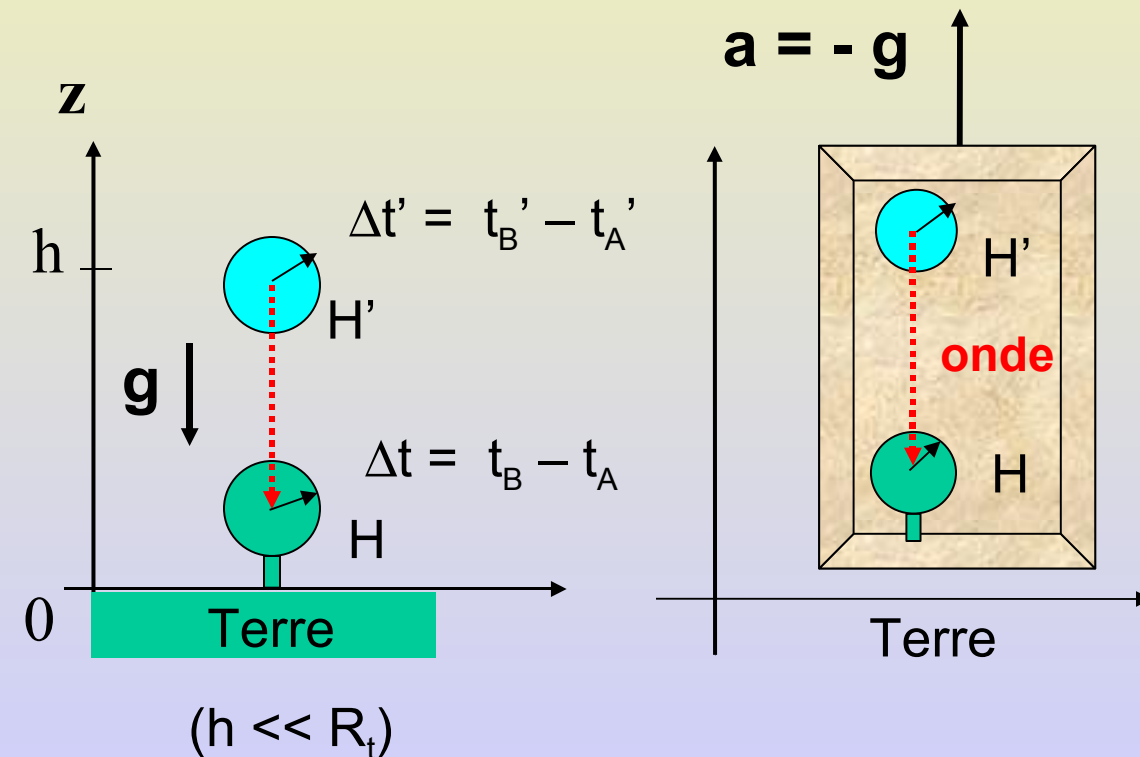
« ou à chacun son temps suite ... »



Synchronisation et relativité générale (3)

Conséquence de la relativité générale : **le ralentissement gravitationnel des horloges.**

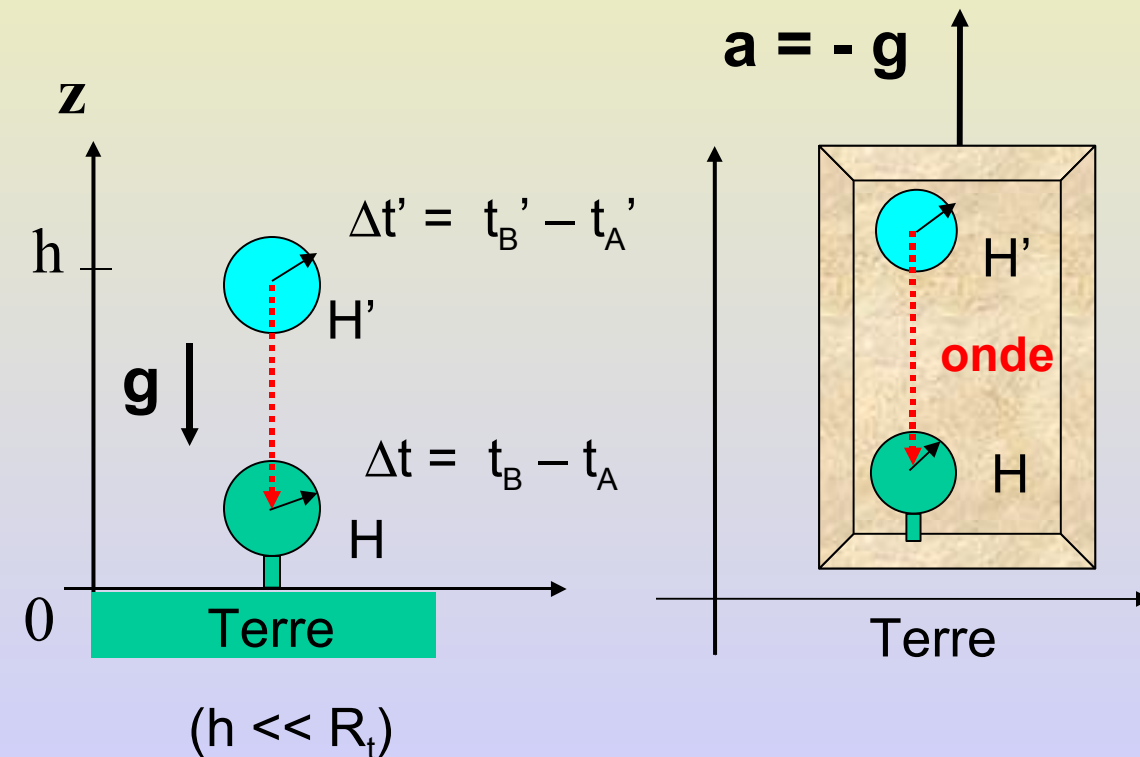
« ou à chacun son temps suite ... »



Synchronisation et relativité générale (3)

Conséquence de la relativité générale : **le ralentissement gravitationnel des horloges.**

« ou à chacun son temps suite ... »



$$\Delta t' = NT' = \frac{N}{f'}; \Delta t = NT = \frac{N}{f}$$

Mouvement accéléré :

$$V(H): 0 \rightarrow V \approx a \frac{h}{c}$$

Effet Doppler :

$$f \approx f' \left(1 + \frac{V}{c} \right) \approx f' \left(1 + \frac{ah}{c^2} \right)$$

Résultat :

$$\Delta t \approx \Delta t' \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$

« Le temps passe plus vite en altitude »

Synchronisation et relativité générale (4)

Application au GPS :

Un petite complication : le champ de pesanteur n'est pas **uniforme**

Mais en « intégrant » on obtient :

Synchronisation et relativité générale (4)

Application au GPS :

Un petite complication : le champ de pesanteur n'est pas **uniforme**

$$g(z) = \frac{g_o R_T^2}{(R_T + z)^2}$$

Mais en « intégrant » on obtient :

$$\Delta t = \Delta t' + \Delta t' \left(\frac{g_o R_T^2}{c^2} \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) \right)$$

Avec : $g_o = 9,8 \text{ ms}^{-2}$; $R_T = 6400 \text{ km}$, $h = 20\,200 \text{ km}$

En un jour un **énorme** écart de - 45 μs !

Synchronisation, conclusion

En combinant les deux effets :

$$\Delta t \approx \Delta t' + \Delta t' \left(\frac{V^2}{2c^2} + \frac{g_o R_T^2}{c^2} \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) \right)$$

D'où un écart journalier de - 38 μ s !

On compense au niveau des satellites eux mêmes et de leur horloge :

10,23000000000 MHz \longrightarrow 10,22999999543 MHz

soit 0,00457 Hz !

Une anecdote

(Neil Ashby)

En 1977, lors du premier lancement ...

Un peu d'électromagnétisme : propagation dans l'ionosphère (1)

L'ionosphère ($50 < z < 1000$ km)



- ❑ Un milieu faiblement ionisé
- ❑ Un milieu variable dans le temps : $N_e(z,t)$ (électrons)
- ❑ Un milieu dispersif : $v_\phi(\omega)$, $v_g(\omega)$

Un peu d'électromagnétisme : propagation dans l'ionosphère (2)

□ Modélisation simple du plasma ionosphérique :

$$v_g(\omega) = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad n_g = \frac{c}{v_g} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \approx 1 + \frac{A}{f^2} N_e$$

$(f_p \ll f_{GPS})$

□ Retard dû à la propagation dans l'ionosphère :

$$c\Delta t = c \int \frac{ds}{v_g} = \int n_g ds = \int (n_g - 1) ds + \int ds$$

$$D' = \int ds = c\Delta t + \int (1 - n_g) ds \approx c\Delta t - \frac{A}{f^2} \int N_e ds$$

Un peu d'électromagnétisme : propagation dans l'ionosphère (3)

- Correction par mesure bi-fréquences :

$$D' \approx c\Delta t_1 - \frac{B}{f_1^2} ; D' \approx c\Delta t_2 - \frac{B}{f_2^2} \quad ; \quad B = A \int N_e ds$$

$$D' \approx c \frac{f_1^2 \Delta t_1 - f_2^2 \Delta t_2}{f_1^2 - f_2^2} \quad f_1 = 1,228 \text{ GHz} \quad ; \quad f_2 = 1,575 \text{ GHz (GPS)}$$

- Autre correction possible :

Modéliser l'ionosphère et son évolution

Un peu d'électromagnétisme : propagation dans la troposphère (1)

La « troposphère » ($0 < z < 50 \text{ km}$)



□ Un milieu gazeux neutre :

$\text{N}_2, \text{O}_2, \text{Ar}, \text{CO}_2 \dots$; H_2O

□ Un milieu non dispersif ($f < 15 \text{ GHz}$)

Un peu d'électromagnétisme : propagation dans la troposphère (2)

- ❑ Retard dû à la propagation dans la troposphère :

$$D' = \int ds = c\Delta t - \int (n-1)ds$$

- ❑ Modélisation de l'indice :

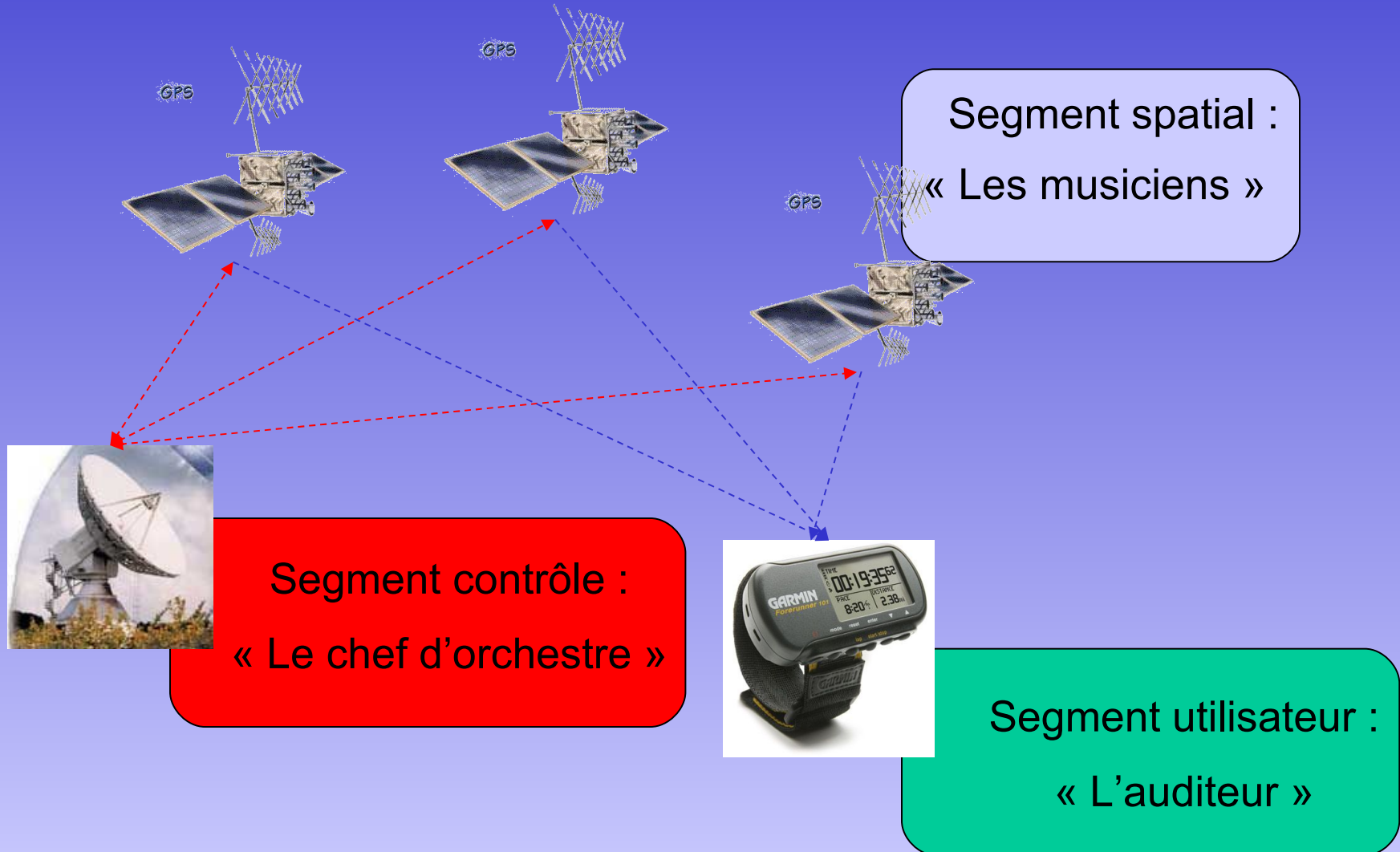
$$(n-1) = 10^{-6} N$$

$$N = N_{\text{sec}} + N_{\text{eau}} \text{ (réfractivités)}$$

$$N_{\text{sec}} = k_1 \rho \text{ (loi de Gladstone)} ; N_{\text{eau}} = k_2 \rho_{\text{eau}} + k_3 \rho_{\text{eau}}/T$$

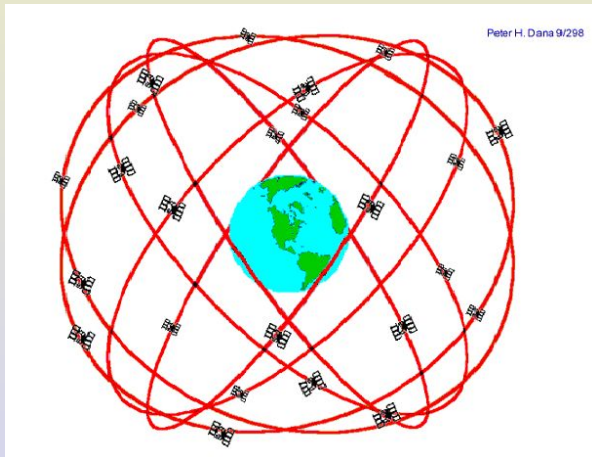
- ❑ Modélisation de l'atmosphère
- ❑ Conditions météorologiques locales

Pratique du positionnement global : Les 3 segments

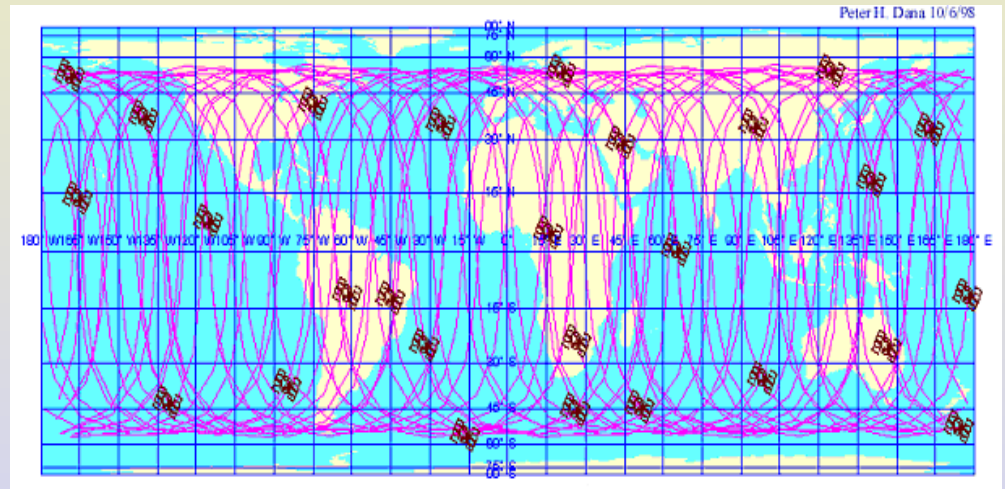


La constellation de satellites (1)

Avoir en tout point et 24H/24 au moins 4 satellites
au dessus de l'horizon et « bien » disposés

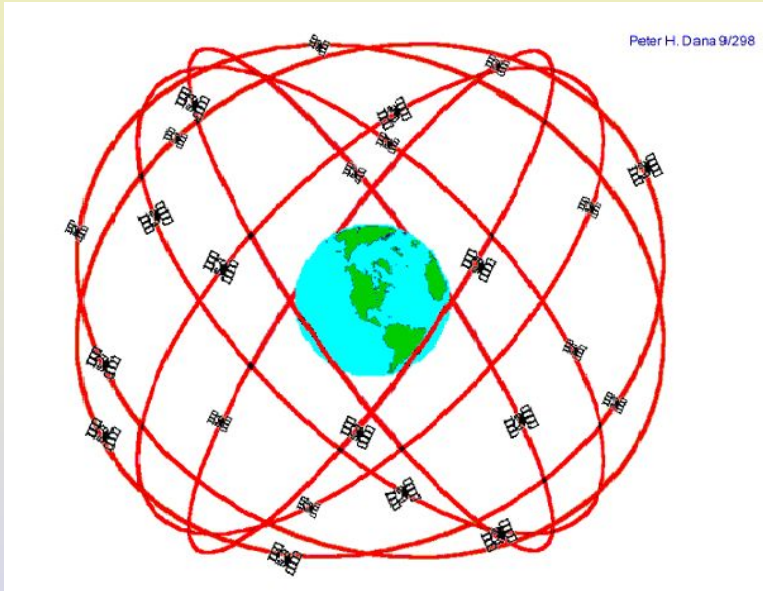


Trajectoires dans le
repère « géocentrique »



Trajectoires dans le
repère « terrestre »

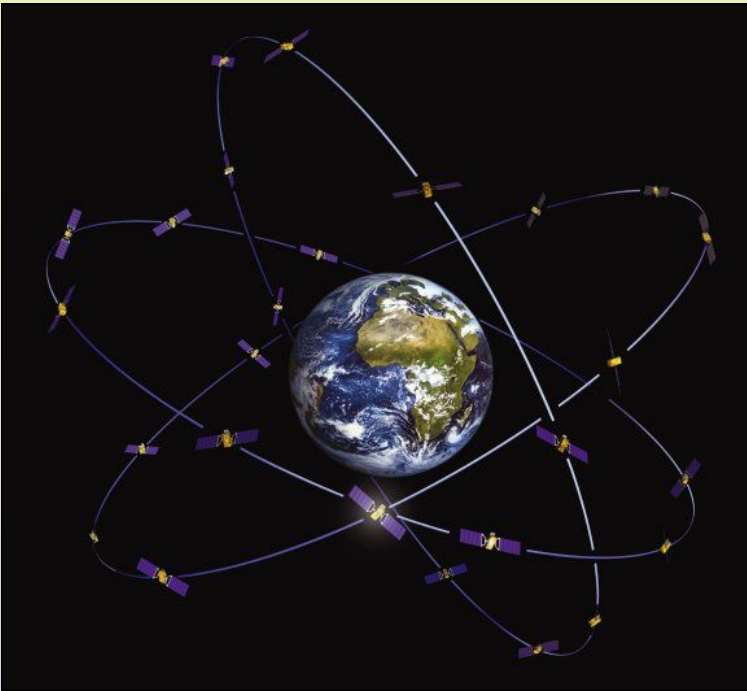
La constellation GPS (2)



- 24 satellites
- 6 plans orbitaux inclinés de 55° sur l'équateur et décalés de 60° entre eux

- Trajectoires quasi circulaires à 20 200 km d'altitude
- Période : 11h 58 min
- Vitesse : 3,9 km/s

La constellation Galileo (3)



- 30 (27+3) satellites
- 3 plans orbitaux inclinés de 56° sur l'équateur

- Trajectoires quasi circulaires à 23 200 km d'altitude
- Période : 14h 7 min
- Vitesse : 3,7 km/s

Aujourd'hui et demain ...

**De tout temps :
Où suis je ?
Quelle heure est- il ?**



Au XXI^{ème} siècle

Espace-temps relativiste

Aujourd'hui : GPS



**Demain :
Galileo (2010)**